

د ریاضی د تد ریس او زده کړې لپاره مرستندویه مواد

استدلال او ریاضی

علم شناسي (Epistemology) د علم یا پوهې د ماهیت او اشکالو له علم څخه عبارت دی. بر سیره پردې علم شناسي دا هم په بر کې نیسي چې علم څنگه تر لاسه کېږي او څنگه بنوودل کېږي او منابع یې کومې دي او معتبره پوهه کومه ده؟.

د علم منابع (علم له کوم ځایه څخه تر لاسه کولای شو) مختلفې وي او د بشري تاریخ په اوږدو کې مختلفې منابع د معتبرې پوهې د منابعو په حیث بلل شوي و او له یوې ټولنې څخه تر بلې ټولنې فرق لري

په عمومي توګه د بشر د پوهې منابع په وحی، تجربه، استدلال یا منطق (عقل) او څیړنې (تحقیق) کې خلاصه کېدای شي.

د بشري پوهې له پورته ذکر شویو مراجعو او منابعو څخه یو هم «استدلال» دی. بشر د خپل ماحول د پیژندنې لپاره له استدلال څخه کار اخستی وو او دی. استدلال عمدتاً په دوه ډوله وي: قیاسی استدلال (Deductive reasoning)؛ او استقرایی استدلال (Inductive reasoning).

قیاس یا قیاسی استدلال (کله کله استنتاجی استدلال هم بلل شوی) په منطقي استدلال باندې بنا دی چې په منطق کې د ارستو له لویو لاسته راوړنو څخه ګڼل کېږي. قیاسی استدلال په یوه منل شوي اصل (کلي قاعده) یا بدیهه اصل (بېله ثبوت څخه منل شوی وي) باندې بنا وي. د منطقي استدلال بنیادي اصل دا دی چې د یوې سلسلې منطقي قدمونو په اخستلو سره به د له («عموم» څخه د «خاص» په اړه د یوې معتبرې ادعا له مخې نتیجه گیری کېږي. مثلاً:

انسان فنا کیدونکی دی (منل شوی عمومي اصل)

ارستو یو انسان دی (خاص شی)

نو ارستو فنا کیدونکی دی (له عامې قاعدې څخه د خاص حالت لپاره نتیجه گیری)

یا:

سیاری د لمر په شاوخوا ګرزی. (منل شوی عمومي اصل)

مخکه یوه سیاره ده. (خاص شی)

نو مخکه د لمر په شاوخوا ګرزی. (له عامې قاعدې څخه د خاص حالت لپاره نتیجه گیری)

په ریاضی کې یې مثال کېدای شي دا سی وي:

موازی خطونه یو بل نه قطع کوي.

د یوې مربع مقابلي ضلعي سره موازی وي.

نو د مربع مقابلي ضلعي نه سره قطع کوي.

پدی ترتیب سره دغه ډول استدلال معمولاً «له تیوري څخه د مشاهدې» او «له کل څخه د جز» په صورت کې تر سره کېږي، یا په بل عبارت د تیوري ازمويل د قیاسي استدلال اساسي موضوع وي. مثلاً د ریاضیکي فارمولونو استعمالول او په کار وړل د عملي مسایلو د حل لپاره د قیاسي استدلال مثالونه کیدای شي.

د قیاسي استدلال ستونځه داسې بولي چې باید مخکې له مخکې یوه کلي قاعده موجوده وي، خو سوال داوی چې دغه کلي قاعده به له کومه کېږي. همدا راز داچې د یوې کلي قاعدې صحت به له کوم ځای څخه تر لاسه کېږي.

استقراء یا استقرایي استدلال

پخوا د احصایې او لاندې د مسایلو د حل په مباحثو کې د استقرایي استدلال په هکله غږیدلي یو او یو شمیر مثالونه مو وکتل او وېه یې گوري. استقراء په لغت کې «کلی په کلی تلولو» ته ویل کېږي. او په اصطلاح کې د مختلفو حالتونو او د ارقامو (معلوماتو) د یو سیټ آزمایلو په وسیله استدلال کول او نتیجه اخیستلو ته استقرایي استدلال ویل کېږي. د استقرایي استدلال معنی دا وي چې موږ د یو لوی جمعیت «کل» څخه یوه اتفاقاً اخیستل شوې نمونه (جز) مطالعه کوو او د هغه جز مواصفات ټول جمعیت «کل» ته عمومیت ورکوو. ساینس پوهان د طبیعت د مختلفو قوانینو د کشفولو لپاره له استقرایي استدلال څخه کار اخلي. د احصایې د علم پوهان له استقرایي استدلال څخه کار اخلي ترڅو دوی د راټول شویو معلوماتو او ارقامو ترلاسه شوې نتیجه گيري تسوید کړي.

استقرایي استدلال کیدای شي په یوه «دعوا» یا بیانیه عبارت منتج شي. دعوا بیا یوه بیانیه جمله وي چې ریښتینې بلل کېږي، خو «صحت» یا «غلطوالی» یې ثبوت شوی نه وي او کیدای شي «صحیح» وي یا «غلطه»، یا په بل عبارت ومنل شي او یا رد شي. نو استقراء یا استقرایي استدلال د قیاس پر خلاف، «له مشاهدې څخه تیوري» او «له جز څخه د کل» خواته تر سره کېږي. د استقرایي استدلال په نتیجه کې د نمونه شویو مشاهدو له مخې شاید یوه «ادعا (دعوا)» یا فرضیه جوړه شي. (مثالونه یې د احصایې او د مسایلو دحل په فصلونو کې وگوري).

استقرایي استدلال په حقیقي ژوند کې د «دعواوو» یا فرضیو د جوړولو لپاره ډیر ښه دي، خو بیا هم کله کله ستونځمنی وي. مثلاً کله کله د ډیرو لابراتواري آزموینو او حالتونو د مطالعې په مرسته د استقرایي استدلال له مخې ثابته کړی چې یوه دوا بشپړه مامونه ده او هیڅ جانبي خطرات او عوارض نلري. خو ډیر ځله داسې پېښ شوی دي چې تر یو وخت وروسته بیا پیدا شي چې هغه ډیره خطرناکه او مضره ثابته شوی وي. دغه خبره ددې دلیل دي چې د یوې جوړې شوې (دعوا) لپاره باید ډیرو حالاتو آزمویني وشي ترڅو صحت یې تضمین شي.

د ریاضي مسایل او دهغو دحل ستراتیژي

مقدمه: د مسایلو حل د ریاضي د اساسي اهدافو څه دی. که له ریاضي څخه د ژوند په مربوطه چارو کې گټه وا نه خستله شی، نو زده کړه یې معنی نلری او یوازی د ریاضي او یا امتحان او یا د عالي تحصیلاتو د شمولیت لپاره وی.

عبارتي سوالونه د «مسایلو حلول» Problem Solving هغه اصطلاح ده چې زموږ په تعلیمي فرهنگ کې نوم ورکړل شوی وو. معمولاً زموږ په ریاضي کې عبارتي سوالونه ویرونيکی وی او داسې انگیرل کېږي چې یو خاص طبعي استعداد ایجابوی. د مسایلو په حلولو کې زده کوونکي یو هدف لری خو مسایلو ته اړتیا لری چه دغه هدف لاسته راوړی. نو د زده کړې لپاره یې دا مهمه ده چې زده کوونکو ته د مسایلو د حلولو ستراتیژي هم تدریس شی. د مسایلو د حل د ستراتیژيو په تدریس کې د حل ستراتیژي زده کړه پخپله هدف نه وی بلکه هغه لاری چې باید زده کوونکي ور باندې پوه وی تر څو مسایل حل کړای شی، یې د تدریس هدف وی. یعنی د مسایلو د حل لپاره ستراتیژي یې باید زده کوونکو ته ور وښودل شی.

د مسایلو د حل په اړوند ډیر زیات ماخذونه او ممد مواد پیدا کېږي- هم د کتابونو او هم د دایره المعارفونو او انټرنېټ پاڼو په شکل او یا د نورو هیوادونو د مکاتبو درسي کتابونه او د معلمانو لپاره د ریاضي ممد درسي مواد او لارښود کتابونه. لاندې منابع د موجوده موادو له اساسي ماخذونو څخه دی. که تاسې وغواړئ چې د دغو او یا د ریاضي دنورو مسایلو په هکله خپله پوهه ژوره کړئ، نو دغو لاندې او یا او دی ته ورته ډیرو نورو ته مراجعه کولای شی.

او www.as.ysu.edu

Billstein R., Libeskind S., Lott J. W. (1990). *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*. California: Benjamin/Cummings Publishing Company, Ltd.

د مسایلو حل کول د نړۍ په ټولو تعلیمي نصابونو کې د ریاضي د نصاب د تمرکز اساسي نقطه وي. دغه واقعیت ته په کتو سره د مسایلو حل کول په صنف کې د ریاضي د تدریس اساسي هدف او باید د ریاضي مربوطه ټولو فعالیتونو مهمه برخه وي.

زما شخصي تجربه او مشاهدې دا ښیي (غالباً تاسې به یې هم وینئ) چې ډیرځله یو شمیر ممتاز ځوانان چې د پوهنتون تر فراغت وروسته د لوړو کدری نمرې په ترلاسه کولو سره د هیواد د عالي تحصیلاتو په نهادونو کې د استادۍ په دنده گمارل کیدای شی، هم کله کله داسې فکر او ادعا کوی چې «زما رشته ریاضي، بیولوژی یا بله ده، نو زه مسئولیت نلرم چې په بله رشته کې باید وپوهیږم». دغه خبره کیدای شی یوه لویه تعلیمي ضایعه وبلله شی، ځکه چې دولس کاله لیسه او بیا درې څلور کاله پوهنتوني تحصیلات باید هر چا ته د دی وړتیا ورکړي چې د علومو په بنیادي مسایلو پوه وی یا لږ تر لږه ور باندې د پوهیدلو وړتیا ولری. د دی ستونځې یو علت، او کیدای شی یو له اساسي عواملو یې، په مکاتبو کې د مضامینو منزوي تدریس وی، یعنی دا چې زموږ تدریسي ذهنیت داسې دی چې د تدریس پر محال مضامین یو له بل څخه جلا بلل کېږي او د یوه مضمون پوهه د بل لپاره نه استعمالوو. بل عامل یې دا کیدای شی چې زموږ تدریس معمولاً د زده کړې په لومړۍ مرتبه، یعنی «پوه تر لاسه کولو مرتبه» باندې اکتفاء کېږي او د زده کړې نور لوړ مراتب (درک او پوهیدل، عملي کول، تحلیلول، ترکیبول او ارزیابی کول) ته کمه توجه کېږي. مثلاً: د اجسامو د کتلې او حجم تر منځ رابطه (چې نسبت یې د اجسامو کثافت بولي) به د فزیک د رشتې د ډیرو فارغانو ښه زده وی، خو دغه معلومات بیا، سره له دی چې بنیادي شی دی، د نورو رشتو فارغانو ته حتمي نه ښکاري او ور باندې د نه پوهیدو توجه یې سمدستي داسې کوی چې «زما رشته فزیک نه ده!». همدا راز داسې پوښتنه چې «د انسان په بدن کې پنځه لیتره وینه به څومره کتله ولری؟»، بیا نو حتی د فزیک د رشتې د فارغانو لپاره هم ستونځمن وی او ځینی خو یې بالکل دعلم مربوط سوال نه بولي.

دغه ډول ستونځې یوازی زموږ په هیواد کې نه، بلکه د ټولې نړۍ په تعلیمي نظامونو کې لیدل کېږي. تعلیم پوهانو سعی کړې چې د حل لاری ورته پیدا کړي او ځیرنو ښوودلي چې د دغسې ستونځو علتونه تر یوه حده د تدریس په مرسته رفع کیدای شی. که د تدریس پر محال سعی وشي چې د فارمولونو دحفظولو تر څنګ پدې هم تاکید وشي چې څه معنی لری، له صنف څخه د باندې په بل ماحول کې څنګه کار ځنی اخستل کېږي، څه را څخه غوښتل شوی دی، کوم ډول معلومات به را ته گټور وی چې مسئله حل کړم، زما کومه پوهه را سره مرسته کولای شی، او نور، به تر یوه حده مرسته وکړي چې له ترلاسه شوی پوهې څخه کار واخستلای شی. پدې هکله د گټور تدریس یوه لاره هم د مسایلو تدریس او د تدریس د

ستراتیژیو څخه کار اخستل بولی. د مسایلو د حل ستراتیژیو تدریس او زده کړه که له یوې خوا د مسایلو په حل کولو کې مرسته کوی، له بلې خوا سیستماتیک فکر کول تشویقوی او د افکارو د تنظیمولو او په منظم ډول د فکر کولو وړتیاوې تقویه کوی.

په لاندې بحث کې به کوشش وشي چې د مسایلو د حل په اړه د یو شمیر مفاهیمو او د مسایلو د حل د ستراتیژیو یو شمیر په زړه پورې مثالونه یې درته معرفي شي.

مسئله څه شی ده؟

یوه مسئله هغه وخت موجوده وي چې یو څوک یې د حل لپاره تیار ځواب نلري او په لاس کې یې د حل تیاره طریقه هم نه وي. علاوه پر دې مسئله به د یو چا لپاره یو چلنج او ننگونه هم وي. د ریاضي داکترو درسي کتابونو سوالونه په داسې طریقه طرح شوي وي چې د درس د محتوي په شان نور اضافي پړکښ کول وي. د ډیری زده کوونکو لپاره دغه ډول مسئلې د معمولو رویشونو نور تمرین وي. د مثال په ډول: $12 \times 4 = ?$

پورتني مثال به د اتم ټولگي د زده کوونکي لپاره یو تمرین وي، خو د دوهم ټولگي د ډیری زده کوونکو لپاره به یوه مسئله وي. د مکتب په کتابونو کې اکثراً پوښتنې د لاندې مثالونو (د سوال برخې یې) په شان وي:

مثال: سوال: د یوه جسم حجم 5 لیتره او کثافت یې $0,9 \text{ kg/l}$ (کیلو گرام په لیتر) دی. کتله به یې څومره وي؟
د دا ډول سوال د حل کولو لپاره یوازې دا بس وي چې د یوه شاگرد د کثافت فارمول یاد وي (کثافت = کتله پر حجم یا $D = \frac{m}{v}$)

پدې ترتیب دغه ډول سوالونه یوازې د فارمولونو نور تمرین ګرزی او د معنی پوهیدنې او درک سره کمه مرسته کوی. ځواب ورکوونکي تیار ځواب لري او یوازې د فارمول په یاد راوړل او حل کول ور څخه غوښتل شوی دی. خو که دغه سوال بل ډول مطرح شي، کیدای شي د زده کړې نور جوانب او نور مراتب (درک کول، په عملي مسایلو کې کارول، تحلیلول او نور) ښه تره تشویق او تقویه کړي. مثلاً:

مسئله: د انسان په بدن کې تقریباً 5 لیتره وینه وي. ویلای شي چې کتله به یې څو کیلو گرامه به وي؟

پدې صورت کې شاګرد هڅول کېږي چې د کتلې او حجم تر منځ د رابطې؛ د ا چې کوم معلومات را کړل شوي؛ کوم نور په کار دی؛ له کومه ځایه به یې پیدا کووم؛ څنګه یې باید حل کړم؛ نوری د حل لاری کومی دی؛ او نورو په هکله فکر وکړي. پدې ترتیب مسایل د شاګردانو د زده کړې د مختلفو مراتبو او جوانبو د ودې سبب ګرزی. په دغې مسئلې کې به شاګرد شاید پیدا کړای شي چې په مسئله کې د وینې کثافت ندی را کړل شوی نو له بله ځایه یې باید پیدا کړو.

یو بل مثال: سوال: د یوې دایر شعاع $r = 6400 \text{ km}$ ده، محیط یې پیدا کړي.

دغه سوال هم د درسي کتابونو د معمولو تمرینونو په شان د ریاضيکي فارمولونو نور تمرین دی او په هغه ښه صورت کې یوازې د فارمولونو نظري زده کړه تشویقوي. دغه سوال د یوې مسئلې په شکل په لاندې ډول مطرح کیدای شي:

مسئله: که د مځکې د کرې شعاع $r = 6400 \text{ km}$ وي، د استوا د خط اوږد والي به څو وي؟

د پورته مسئلې حلول دا ایجابوی چی لو مړی پوه شو چه څه شی را څخه غوښتل شوی (د استوا د خط اوږد والی)، کوم معلومات را کړل شوی دی (یوازی د مخکې د کړی شعاع)، کومو نورو معلوماتو ته اړ تیا ده (دا چی د استوا خط د هغی دایری محیط دی چی د مخکې د کړی څخه د استوا د خط په برابر را تاو شوی وی)، او دا چی د استوی د خط د اوږدوالی پیدا کول یعنی د هغی دایری محیط پیدا کول، او بالاخیره دا چی د دایری د محیط او شعاع تر منځ رابطه څنگه وی (فارمول).

په ریاضي کې تمرینونه د استعمال خپل اهداف لري، خو زده کوونکي یوازې د دغه ډول تمرینونو په وسیله له مسایلو سره نه وي مخامخ شوي او پدی ترتیب یی د مسئلو د حل وړتیاوو یی وده نه وی کړی.

د مسایلو د حل ستراتیژی

جورج پولیا (1887-1986) یو هنګري الاصل امریکایي ریاضی پوه په خپل کتاب کې د مسایلو د حل څخه د خوند په هکله داسې لیکي: د یوې لویې مسئلې حلول یوه لویه کشفونه ایجابوي، لکن د هرې مسئلې په حل کې د کشفیاتو یو تخم موجود وي. د تا مسئله شاید لویه نه وي، خو که هغه ستا کنجکاوي تحریک کړي او د تا د نوښت او ابتکار وسایل ساعت تیري ته راوبولي او که یې په خپلو وسایلو حل کړي، نو بیا به د کشفیاتو له لارې د بریالیتوب خوند درته معلوم شي.

جورج پولیا د مسایلو د حل لپاره خپل څلور ګامیزه پروسه جوړه او پیشنهاد کړې وه، چې جزئیات یې په لاندې توګه بیانېږي.

۱- په مسئله ځان پوهول

- آیا مسئله په خپله ژبه په خپلو عباراتو بیانولای شئ؟
- ته د څه شي د پیدا کولو تلاش کوي یا څه کول غواړې؟
- څه شی نامعلوم دی؟
- له مسئلې څخه کوم معلومات ترلاسه کولای شئ؟ (کوم معلومات پکې درکړل شويدي؟)
- کوم معلومات نیمګړي دي؟

۲- د مسئلې د حل پلان جوړول

پدې هکله لاندې لست شوې ستراتیژي ګانې ډیرې ګټورې بلل کېږي.

- علايم او ګډې نښانې پکې وګورئ.
- دې ته ورته مسایل وازموياست او وګورئ چې که عين د حل لاره کاره وي.
- ددغې مسئلې یو ساده او بل لنډ شکل وګورئ، کیدای شي څه رڼايي ورباندې واچولای شی او د حل څوک ځینی پیدا کړی.
- یو جدول یا ګراف ورته جوړ کړی.
- یوه معادله یې ولیکئ.
- حدس ووهئ او وېې ازمویاست.
- بیرته یې د شا په خوا حل کړی.
- یو فرعي هدف ورته وټاکئ.

۳- د طرح شوي پلان عملي کول

- په پورته دوم قدم کې ذکر شوې ستراتیژيګانې عملي کړی او لازم محاسبات ترسره کړی.
- د پلان هره مرحله چک او امتحان کړی.
- خپل کار په دقیقه توګه ثبت کړی.

۴- بیا کتنه

- (a) لاسته راغلي نتیجه مو په اصلي مسئله کې وازمایاست.
- (b) د اصلي مسئلې په رڼا کې خپل حل تعبیر کړی (یعنې څه معنی لري).
- (c) دا وڅیړی چې آیا د حل پیدا کولو کومه بله لاره هم شته؟
- (d) که ممکنه وي دې ته ورته نور مسایل او یا جامعتر مسایل تعین کړی، د کومو لپاره چې ستاسې دغه حل کارآمد کیدای شي.
- پورته څلور ګامیزه ستراتیژي به همیشې د مسئلو حل نشي تضمینولای، خو د مسایلو د حل لپاره ډیرې ګټورې مشورې او لارښوونې بلل کېږي. د معلمانو او په خاصه د ریاضي معلمانو وظیفه به دا وي چې خپلو زده کوونکو ته د امکان تر حده ډیر مسایل ورکړي او ورباندې حل یې کړي.

زموږ د تعلیمي نظام په پخوانیو درسي کتابونو، په خاصه د هندسي درسي کتابونو، کې به د قضیو د حل ستراتیژي یو شکل وو چې د قضیې له مخې به لومړی یوه «دعوا»، ورپسې، «مفروض» بیا «مطلوب» او بالاخره «ثبوت» جوړیدل چې کیدای شي د پولیا د مسایلو د حل دغه څلور ګامیزه ستراتیژي ور سره اړیکې ولري. دلته به «دعوا» د مسلی یا سوال؛ «مطلوب» به د مسئلې توضیح یعنی دا چې څه را څخه غوښتل کېږي؛ «مفروض» به د مسلی د حل پلان؛ او بالاخره «ثبوت» به د پلان عملي کول یا د مسئلې حل کولو معادل وي.

د مسایلو د حل څلور ګامیزه ستراتیژي په دوهم قدم کې په مسئله کې د نښانو (عروضو) لټون دی، چې برسيره پردی چې ډیر مهم دی، خو زموږ په تعلیمي فرهنگ کې ډیر کارنه ورباندې کېږي، نو لاندې لږ په جزئیاتو ورباندې غږیږو، ترڅو معلمان او زده کوونکي ورباندې پوه شي او د مسایلو په حل کې ښه ګټه ځینې واخیستلای شي.

په مسایلو کې د نښو او علایمو یا عروضو لټون

د مسایلو په حلولو کې د علایمو لټون او کشفونه د مسایلو د حل په ستراتیژي کې ډیر مهم دي. په ساینس او ریاضي کې مسایلو ته د حل پیدا کولو لپاره موږ په هغو کې مشترک وجوهات او علایم لټوو. کیدای شي دغه علایم د حل لاره راته پیدا کړی او یانه. د مختلفو حالتونو او د ارقامو (معلوماتو) د یو سیټ آزمایلو په وسیله استدلال کول او نتیجه اخیستلو ته استقرایي استدلال ویل کېږي. استقرایي استدلال کیدای شي په یوه «دعوا» یا بیانیه عبارت منتج شي. دعوا بیا یوه بیانیه جمله وي چې ریښتینې بلل کېږي، خو «صحت» یا «غلطوالی» یې ثبوت شوی نه وي او کیدای شي «صحیح» وي یعنی تصدیق شي او یا «غلطه» وي، یا په بل عبارت ومنل شي او یا رد شي. یعنی کیدای شي هغه «دعوا» چې د هغه د استقرایي استدلال په مرسته ترلاسه شوې وي د «ردوونکي» مثال پوسيله غلطه ثابته شي، یعنې ثابته شي چې غلطه ده. لاندې مثال ته وګورئ او وینو چې د یو شمیر معلوماتو او ارقامو په بنیاد ډیر ځله له یوه زیاتې نښانې یا مواصفات لیدل کیدای شي. لاندې مثالونو ته وګورئ.

لومړی مثال: د لاندې سلسلې لپاره درې نور حدونه پیدا کړئ.

1, 2, 4, _____.

حل: د لومړي دو حدونو ترمنځ فرق یو دی ($2-1=1$) او د دوهم او دریم ترمنځ فرق دوه دي ($4-2=2$) نو ویلای شو چې د ورپسې دوو حدونو ترمنځ فرق به شاید (۳) او د ورپسې به (۴) او نورو. نو ادعا کړای شو چې تکمیل شوی سلسله به داسې ښکاري:

۱، ۲، ۴، ۷، ۱۱، ۱۶

خو که لږ غور وکړو وینو چې د ۱، ۲ او ۴ ترمنځ یوه بله مشترکه مشخصه هم شته او هغه دا چې: د سلسلې دوهم حد د هغې د لومړي حد دوه چنده ده ($2*1=2$) او دریم حد یې د دوهم دوه چنده ده ($4*2=2$) نو کولای شو نتیجه واخلو چې نور حدونه یې کیدای شي ۸، ۱۶ او ۳۲ وي او تکمیل شوی سلسله به بیا داسې ښکاري: ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲.

دغه مثال ښیي چې په یو راکړل شوو معلوماتو کې کیدای شي تر یوه زیات ډول علایم موجود وي نو تر استنتاج مخکې هغه باید په دقت وڅیړل شي.

دوهم مثال: د لاندې سلسلې د تکميل لپاره لازم حدونه پيدا کړي.

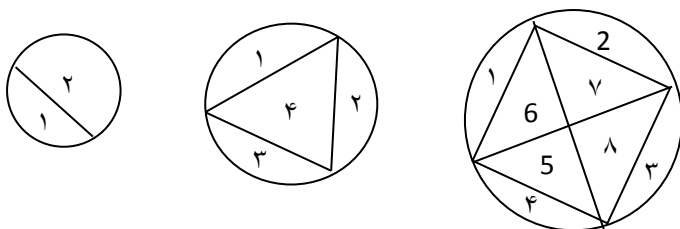


حل: ښکاري چه د هرو دو مربع گانو ترمنځ دوه حاده الزاويه مثلثونه دي. ددغې مشاهدې له مخې ويلاى شو چه راتلونکې حدونه به دوه حاده الزاويه مثلثونه او يوه مربع وي لکه د لاندې په شان:



دوهم مثال: د لاندې شکل په شان د یوې دایرې په محیط یو شمیر نقطې ټاکو او هغه سره وصلو تر څو د دایرې منځ په مختلفو ساحو وویشي. لکه چې وینو دوه نقطې د دایرې مخ په دوو ساحو، ۳ نقطې یې په څلور و ساحو او څلور نقطې یې په ۸ ساحو ویشي.

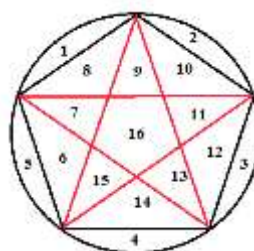
لومړی شکل:



د ولس (۱۲) نقطې به یې په څو ساحو وویشي؟ او بیا په عمومي توګه (n) شمیر نقطې به یې په څو ساحو وویشي؟ د پورته لومړي شکل ارقام په لاندې جدول کې ښودل شوي دي. داسې ښکاري لکه چه د هرې نقطې په زیاتیدو سره به د په لاسته راغلو ساحو شمیر دوه چنده کیږي. که دغه علامه رښتیايي، نو په 5 نقطو به 16 یا 2^4 ساحې او په 6 نقطو به 32 یعنی 2^5 ساحې تر لاسه کړو، او نور. یا دا چې «د ۲ توان یا طاقت به د نقطو له شمیر څخه د یوه په اندازه کم وي».

د نقطو شمیر	۲	۳	۴	۵	۶		۱۲		N
د ساحو شمیر	$2=2^1$	$4=2^2$	$8=2^3$						

که موږ خپل حل د دغو علایمو په بنا ووايو، نو ۱۲ نقطې به 2^{11} یا ۲۰۴۸ ساحې لاسته راګړي، او بالاخره په عام ډول به د n نقطو په وسیله 2^{n-1} ساحې جوړې شي. ګور وچه ۵ به ۱۶ ساحې یعنی 2^4 ساحې جوړې کړي (لاندې دوهم شکل) چې زموږ د پخواني ادعا صحت ثابتوي. خو که یو قدم مخکې بل حالت وګورو چه رښتیا ده، که نه؟



(دوهم شکل)

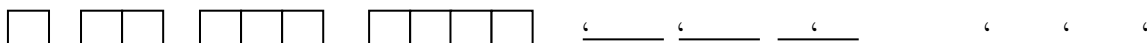
وینو چه ۶ نقطه ۳۱ ساحه جوړوی چه دغه زموږ هغه ادعا چه (۳۲=۲^۵) ساحه به جوړی کړی، ردوي. نو دغه مثال دا معنی لری چه زموږ حدس چه 2ⁿ⁻¹ ساحه په n نقطو لپاره جوړی شی، غلطه ده. دارنگ زموږ ادعا همدغه ډول د ۷ نقطو لپاره هم صحیح نده او د ۱۲ نقطو لپاره هم غلطه ده. دغه نتیجه به زموږ لپاره حیرانوونکي ښکاری چه په لومړی سرکی زموږ درست حدس او گمان غلط ثابت شو. پورتنی مثال هغه خطرونه په گوته کوی چه یوازی د محدود و آزموینو په نتیجه کی یوه (ادعا) یا فرضیه ترتیب شوی وي. باید پوه شو چه د یو دایری په محیط به n نقطی په هغه دایری کی د لاندی فارمول په شان ساحه جوړی کړی.

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

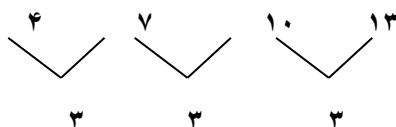
(n=1,2,3,4,...,31,...,n)

د حسابی سلسلی یو مثال:

یوه سلسله داسی حدونه توضیح کوی چه کولای شو په عددی ترتیب یی ولیکو، یعنی لومړی، دوهم او نور. که هر راتلونکی حد د مخکینی حد سره د یو ثابت عدد د جمع کولو یا تفریق کولو په وسیله لاسته راشی، نو دغه سلسله حسابی سلسله بولی. لاندی مثال ته وگوری. مثال: په لاندی شکل کی هغه علایم پیدا کړی چه ددغی سلسلی د ورپسی حدونو لپاره د اورلرگی د خلیو تعداد ځینی پیدا کیدای شی.



حل: که یی وشمیر، وپوهیدای شو چه په راکړل شویو مسلسلو حدونو کی د اورلرگی د خلیو شمیر ۴، ۷، ۱۰ او ۱۳ دی. لکه چه وینو د هرو دو حدونو ترمنځ فرق ۳ دی.



د سلسلی حدونه:

تفاوت:

که په راکړل شوی سلسله کی دغه ډول مواصفه دوام ولری، نو باید د نورو دریو حدونو لپاره د خلیو شمیر ۱۶، ۱۹، ۲۲ وی. له شکل څخه په اسانی ښکاری چه د هری بلی مربع د جوړو لپاره یوازی دریو خلیوته اړتیاوی، ځکه چه د هری راتلونکی مربع یو څنگ د مخکینی مربع د یوه څنگ په وسیله تکمیل شوی وي، یعنی یو څنگ (ضلع) یی سره شریکه وی.

هر وخت دا ډیره ښکته وي چه په یوه سلسله کی د یو حد وړاندوینه وکړای شو. د دغه ډول کمیتونو پیدا کولو او مسلو حل کولو لپاره د جدولونو جوړول یوه ډیره مرستندویه وسیله ده. لاندی جدول د پورتنی مثال سلسله ښی. په لاندی جدول کی (د حد نمبر) ستون په سلسله کی د یو حد ترتیبی نمبر یا ترتیب راښی. په جدول کی د (حد) ستون بیا په سلسله کی د حدونو د قیمتونو لست راښی. په جدول کی د دریو ټکیو (....) معنی داوي چه سلسله په همدغه طریقه دوام لری، یا په بل عبارت (الخ = الی اخر = ترپایه).

حد	د حد نمبر
4	1
7=4+3=4+1.3	2
10=4+3+3=4+2.3	3
13=4+3+3+3=4+3.3	4
.	.

.	.
.	.

که پورته جدول ته وگورو، وینو چه په هر حد کی د ۳ تعداد د حد تر نمبر یو لږ (کم) دي، مثلاً په دوهم حد کی یو خل ۳، په دریم کی دوه خلی ۳ او په څلورم کی دری خلی ۳ دي. که چیری دغه علایم (نښی) یا مواصفات په دغه سلسله کی دوام کړی، نو لسم حد به یی عبارت وی له: $4+3+9$ یا ۳۱، او لسم حد به یی: $4+9+9+3$ یا ۳۰۱ وی. په دغه ترتیب، عمومی حد یا n ام حد موږ ته په یوه سلسله کی د هر غوښتل شوی حد د قیمت د پیدا کولو وړتیا راکوی، یعنی کولای شو چه د هر غوښتل شوی حد د قیمت وړاندوینه وکړو. په پورتنی مثال کی په د سلسلی n ام حد قیمت عبارت وی له: $4+(n-1)3$

ځینی له تاسی څخه شاید دغه مقدار $3n+1$ وبولی، چه دغه په الجبری لحاظ د $4+(n-1)3$ معادل دي. ددغی سلسلی د ۲۰۰ ام حد د پیدا کولو لپاره په د n په ځای ۲۰۰ ولیکو او محاسبه به یی کړو، یعنی:

$$4+(200-1)3=601 \text{ نو د دغی سلسلی ۲۰۰ وم حد به ۶۰۱ کیږی.}$$

له دغه فارمول څخه په سلسله کی د یو حد د نمبر پیدا کولو لپاره هم گټه اخستلای شو پدی شرط چه که د یوه حد قیمت یی راکړل شوی وی. مثلاً د د غی سلسلی د یوه حد قیمت ۱۷۹۸ دي، دغه به یی څووم حد په وی؟

$$4+(n-1)3=1798 \text{ پوهیږو چه:}$$

$$(n-1)3=1798-4=1794 \text{ او:}$$

پس:

$$n-1 = \frac{1794}{3} = 598$$

$$n=599 \text{ نو:}$$

د سلسلی نور مربوط مسایل د یوولسم صنف د ریاضی په کتاب کی شته.

یادونه: پورتنی سوال په مروج تدریس کی معمولاً داسی مطرح کیږی:

د یوی حسابی سلسلی لومړی حد ۴ او تفاوت یی ۳ دی، سلم حد یی پیدا کړی.

د سوال دغه ډول مطرح کول یوازی د یوه فارمول (د متحولونو تر منځ رابطه) په یاد راوړل او د یوی ریاضیکی معادلی حل کول تشویقوی او د درسی کتابونو د تمرینونو په شان تمرین ته ورته دی. اما په هغه ډول چی پورته بحث ورباندی وشو، د د رک او فهم اخستلو، عملی کولو، د مسئلی تحلیلول، د مختلفو پوهو ترکیبول او یو ځای کار ځینی اخستل، او د متنوعو حلونو ارزایی کول او مناسب حل تعینول پکی راځی. پدی ترتیب نه یوازی د حفظ شویو فارمولونو په یاد راوړل او د ریاضیکی معادلو د حلولو پروسه بلکه د زده کړی لوړ مراتب تقویه کوی چی د مکتب په تعلیم کی اساسی اهداف وی. په مروج تدریس کی تر ډیره حده د زده کړی لومړی مرتبه یعنی پوه پیدا کول تشویقیږی.

ډمسائيلو دحل پروسى استعمال :

دغه لاندې جمله ولولئ:

په يوه ونه كې (۱۰) مرغى ناستي دي. يوهلك دلندې وار پرې وکړاو يوه يې وويشتله. وواياست چې په ونه كې به څو مرغى پاته شوى

وي؟

كه پورتنى پوښتنى ته ستاسى ځواب (صفر يا هيڅ يوه هم نه) وي، نو وريام شوى مودي او كه ځواب دغه نه وي نو بيا په سوال ښه نه ياست پوهيدلى.

لكه چه مخكې مو وويل، ډمسائيلو دڅلور گاميزه پروسى څخه گټه اخستنه ډمسائلي حل نه تضمينوى، خودمسائلي دحل سيستماتيكة لاره راښيي. لاندې به دغه څلور گامونه په تفصيل سره بيان شى .

لومړى قدم : په مسئله (سوال) پوهيدل

په مسئله پوهيدنه يوازي دلفظي لوستنى مهارت نه، بلكه دا تعينول ايجابوى چه څه راڅخه غوښتل كيږي؟ كوم معلومات پكې راكړى شويدي؟

اوبالاخره، كوم معلومات كمبود دي او كوم معلومات بيا پكې غير ضرورى دي؟ لاندې مثال ولولئ:

سلام او صالح د عقيدوى درسونو په كورس كې د داخلي اخيستلو لپاره هلته ولاړ. د كورس فيس ديوه تن لپاره (۱۰۰) افغانى وو. سلام د (۵۰۰) افغانيو نوټ وركړاو درى سوه افغانى يې بيرته تر لاسه كړى. په لس نيمو بجو دكورس په كانتين كې، صالح دوه دانى جوسان، هر يو په (۱۰) افغانى او دوه دانى بسكيټ، هر يو په (۵) افغانى واخيستل. دوى په پاو كم دوولسو بجو له كورس څخه ووتل. وواياست چه د دوي دجوس مصرف څومره وو؟

په پورته متن كې كه څه هم غوښتنه واضح ده، خو نور ډير غير ضرورى معلومات لري. يوازي مهم معلومات پكې دجوس قيمت (۱۰) افغانى دى اوداچه دوه دانى جوسان يې اخستنى دي، نو د دوى د جوس ټول مصرف (۲۰) افغانى كيږي.

مثال: كوچنى اختر د مياشتې په لومړى نيټه، او لوى اختر د مياشتې په لسمه نيټه وي. وواياست چه دغو دوو اخترونو د اولو ورځو تر منځ به څو ورځې وى؟

په دغه مثال كې غير ضرورى معلومات نشته، خو اضافى ممدو محاسبو اومعلوماتو ته اړتيا لرو تر څو د سوال ځواب پيدا كړو.

اول داچه دكوچنى اختر (شوال) او ميانى (ذوالقعدى) مياشتې د رمضان اولوى اختر د ذوالحجې د مياشتو ترمنځ دي. دوهم داچه دغه دوه مياشتې څوڅو ورځې وي. بالاخره دا چه د (ترمنځ) د مفهوم معنى څه ده؟ په رياضى كې د (ترمنځ) اصطلاح مشموله نه وى، يعنى د كوچنى اختر لومړى اود لوى اختر لومړى ورځې پكې شاملې ندى، نو د دغو دوو ورځو (ترمنځ) په ورځو كې به يې نه حسابوو .

دوهم قدم : د مسئلې د حل پلان جوړول

د پلان جوړول د مسئلې د حل لپاره د مناسبو ستراتيژيو طرح كول وي، چه د مسلى په حل كولو كې مرسته وكړاى شى. دسوالونو دحل لپاره د كومى خاصى ستراتيژى پيشنهاد كيداى نشى، خو د مسلو حل لپاره دمختلفو ستراتيژيو په هكله معلومات لرل او هغه تمرينول ډير گټور ثابتيږي. ستراتيژى يو ډول وسايل دي چې ډمسائلي په حل كې مرستندوى واقع كيږي او د عمومى حالاتو د درك وړتيا مو تقويه كوي. دهغه زاړه متل په استناد چه :

كه يو چا ته يوه گوله مړى وركړى، يوه ورځ به د موږ كړى وي.

که یو چاته د مړی پخولو چل وروښی، په ټول عمر به د دموړ کړی وي.

دریم قدم : د طرح شوی پلان عملی کول

په دغه قدم کې د مسئلې دحل لپاره دانتخاب شوی ستراتیژی عملی کول راځي. که یوه ټاکل شوی ستراتیژی کار ورنکړی، نو باید د بلی په لټه کې شو. په دغه مرحله کې به موږ همدا راز یوشمیر حسابی او یا الجبري محاسبات هم تر سره کوو ترڅو د مسئلې حل تر لاسه کړو.

خلورم قدم : بیا کتنه

د بیا کتنې په مرحله کې مونږ دمسئلي پیدا شوی حل امتحان یاچک کوو اوگورو چه: آیا دغه ځواب منطقی ده؟ او: آیا دغه حل دمسئلي پوښتنه یا پوښتنې ځوابولای شی؟ خو په دغه برسیره مونږ باید د حل توسعه هم وڅیړو او دا هم باید وگورو چه د حل نوری لاری هم لری که نه؟ په ډیرو مواردو کې دحل توسعه دمسئلي تر حل ډیره جالبه او په زړه پوری وی.

دمسائلو دحل لپاره د یو څو ستراتیژیو مثالونه

دمسئلي دحل پیدا کولو په حالت کې یو شاگرد یو هدف لری چه باید تر لاسه کړی، خو شاگرد دهغه د تر لاسه کولو وسایل شاید په واک کې ونلری. دمسایلو دحل ستراتیژی هغه افزار یا وسایل وي چه کیدای شی دهدف دلاسته راوړ لپاره د وسایلو په پیدا کولو یا جوړولو کې مرسته وکړی. لاندی یوشمیر ستراتیژی په مثالونو کې واضح شوی دي، هیله ده چی مرستندویه به واقع شی او د تاسی د نوښتونو او ابتکار حس به هم را وهڅوی.

1- په یوه پدیده کې د مشترکو علایمو او نښانو کتل

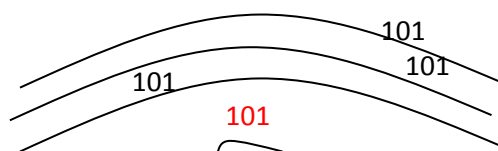
په مخکینیو پا یوکی مود سلسلی په مثال کې د ګډو مواصفتو اونښو دکتلو او لیون بیان کړی، دلته بیا هم د هغی پشان پلټنی ته دوام ورکړو. **اوله مسئله**

مشهور المانی ریاضی پوه کارل ګاوس چی ماشوم وو، معلم یی ورته ویلی وو چه د(۱۰۰) لومړینو طبعی عددونو مجموعه پیدا کړی. وایی چی معلم یی فکر کاوو چه اوس په نو صنف تر یوه وخته پکی مشغول شی او دی به ځینی بیغمه وی. ګاوس بیله ځنده ځواب ورکړ. آیا تاسی هم کولای شی چه د پورته سوال ځواب فوری وواياست؟

۱. په مسئله پوهیدل: طبعی اعداد 1,2,3,4,... دی. نو را څخه غوښتل کیږی چه د $1+2+3+4+...+100$ مجموعه پیدا کړو.

۲. د پلان طرح کول: یوه ممکنه ستراتیژی په مسئله کې د علایمو اونښو کتل وی. که ورته وگورو چه په

(100+1,2+99,3+98,...,50+51) کې به واضحاً د دوعددونو (50) داسی جوړی وی، چه مجموعه یی (101) کیږی (لاندی شکل ته وگوری)

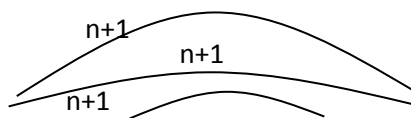


$$1+2+3+...+50+51+...+98+99+100$$

3. د پلان عملی کول: لکه چه وینو، د دو عددونو 50 د اسی جوړی لرو چه دهری جوړی مجموعه (101) کیږی، نو:

ټوله مجموعه به: $50 \times 101 = 5050$ شی.

4. بیرکتنه: پورتنی طریقه مو دریاضی له نظره صحیح ده، ځکه چه دعددونو جمع کول په هر ترتیب صحی دي او ضربول د متواتری جمع په معنی ده. یوه عمومی مسئله داده چه څنگه دهره n طبعی عددونو مجموعه پیدا کړو، یعنی: $1+2+3+\dots+n = ?$ بیا هم پورته په شان پلان عملی کوو او گورو چه یوډول رابطه پکی موجوده ده، د لاندی شکل په شان:



$$1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)+n$$

که n یو جفت طبعی عدد وی، نو د یوه n تر منځ به $\frac{n}{2}$ جوړی عددونه وي او د هر یو جوړی مجموعه به $(n+1)$ وي. دغه مجموعه به د $(n+1)\frac{n}{2}$ سره برابره وی. که n طاق عدد وی، نو آیا دغه فارمول به بیا هم صحیح وي؟ دغه د تاسی د فکر کولو لپاره پریږدو!

2. د جدول جوړولو ستراتیژی: دمسلو دحل یوه بله مشهوره او کاری ستراتیژی هم دجدولونو جوړول دي. یو جدول کیدای شي د ارقامو (معلوماتو) دخلاصه کولو لپاره جوړ کړو، او یا یی ددی لپاره جوړ کړو چه په یوه مسئله کی نښی او علایم ووینو. همدارنگه دجدول په مرسته کولای شو چه په یوه مسئله کی ټول ممکن حالتونه وگورو او ویی وینو.

دوهمه مسئله: که دمخکینی مثال (؟ مخ) چی دیوی حسابی سلسلی دحدونو او مجموعی په اړه وو، راواخلو او وغواړو چه هغه حل ته عمومیت ورکړو، کولای شو چه د جدول جوړولو ستراتیژی به په دغه لار کی ښه مرسته وکړی. فرض کوو چه په یوه حسابی سلسله کی لومړی حد (a) وي او د دوو حدونو ترمنځ تفاوت یی (d) وي، نو د جدول جوړولو په مرسته به دا وڅیړلای شو چه د $a, a+d, a+2d, \dots$ سلسلی لپاره عمومی حد $(n \text{ ام حد})$ به څنگه پیدا شی؟

حد	دحد نمبر
a	1
a+d	2
a+2d	3
a+3d	4
.	.
.	.
.	.
a+(n-1)d	N

لکه چی په پورته جدول کی وینو، د دغی سلسلی لومړی حد (a) او تفاوت یی (d) دی، نو n ام حد به یی: $An=a+(n-1)d$ وي. فرضوو چه: د $(5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots)$ سلسلی، چه لومړی حد یی $a=5$ او تفاوت یی $d=4$ دي، نو n ام حد یی عبارت دي له:

$$\begin{aligned} An &= a+(n-1)d = 5+(n-1)4 = \\ &= 5+4n-4 = 4n+1 \end{aligned}$$

مثال: دیوی حسابی سلسلی دوه لومړی حدونه به څووي، که چیری دهغی دریم حد (13) او دیرشم حدی (121) وي؟
حل: د پورتنی قاعدی په اساس به د دغی سلسلی n ام حد باید: $a+(n-1)d$ وي، نو لاندی جدول ورته جوړوو:

حد	دحد نمبر
؟	1
؟	2
13	3
13+d	4
13+2d	5
13+3d	6
.	.
.	.
.	.
?	30

ددغی سلسلی دیرشم حد به: d 13- په شان وي. څنگه چی څلورم حد یی $(13+d)$ دي، نو پنځم حد به یی $(13+2d)$ وي، اوڅنگه چه دا یوه حسابی سلسله ده، نو په هر حد کی یی د d گانو شمیر په هر صورت کی د حد له نمبر څخه (3) کم دي. نو پدی اساس دیرشم حد به یی: $(13+27d)$ وي. څنگه چه راکړل شوی دی چی دیرشم حد یی (121) دي، نو لروچه :

$$13+27d=121$$

$$27d=108 \quad \text{یا:}$$

$$d=4 \quad \text{پس:}$$

نود هغی دوهم حد به : $(13-4=9)$ ، او اول حد به یی: $(9-4=5)$ وي.

3 . یوی معادلی دلیکلو ستراتیژی

دغه ستراتیژی په معمولی ډول د الجبری مسئلو په حل کی استعمالیږی. ددی لپاره چه الجبری پوهه د مسلو دحل لپاره وکاروو نو معمولاً مجبورېږوچه راکړل شوی معلومات په سمبولیکو توضیحاتو، چه کمیټونه ولری، ترجمه کړو او وایی ږوو. لاندی مثال ته وگوری :

مثال : یومعلم شاگردانو ته وایی چه :

تاسی یو عدد په زړه کی ونیسی او بیا 15 ورجمع کړی او هغه مجموعه په 4 کی ضرب کړی. ترهغه وروسته 8 ځینی کم کړی اومتبافی یی په 4 وویشی. که له دغه خارج قسمت څخه بیا 12 تفریق کړی او هغه عدد ماته ونیاست، زه به درته وویلای شم چه تاسی کوم عدد په زړه کی نیولی وو!

حل : ددی لپاره چه مسله تحلیل کړو او وگورو چه څنگه کولای شو چه هغه عدد پیدا کړی، موږ راکړل شوی معلومات په الجبری شکل اړو (لاندی جدول ته وگوری) .

سمبول	بحث	لارښوونه
-------	-----	----------

n	داچه مطلوب عدد هر عدد کیدای شی نو n یی بولو .	یو عدد خوښ کړی (په زړه کی یی ونیسی).
n+15	ویل شوی چه : <u>هغه ته یعنی n ته</u>	15 ورجمع کړی.
4(n+15)	15 ورجمع کړی. ویل شوی چه <u>هغه مجموعه یی په</u>	هغه مجموعه په 4 کی ضرب کړی.
4(n+15) -8	4 کی ضرب کړی، <u>هغه مجموعه</u> یعنی (n+15) .	8 ځینی کم کړی .
$\frac{4(n+15)-8}{4}$	اوس نو له <u>هغه محصول څخه</u> اته کموو .	هغه تفاوت یی په 4 وویښی .
$\frac{4(n+15)-8}{4}$	هغه تفاوت (4(n+15) -8) دي نو دغه په 4 تقسیموو .	له خارج قسمت څخه 12 کم کړی.
$\frac{4(n+15)-8}{4}$ -12	بالاخره، مونږ له <u>خارج قسمت</u> څخه 12 تفریقوو .	ځواب یی راته وواياست

که حل یی کړو نو و به لرو چې:

$$\frac{4(n+15)}{4} - 12 = n + 1$$

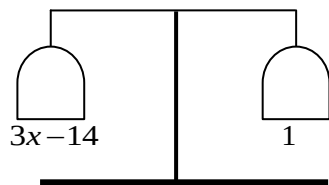
وواياست چې معلم له کومه پوهیدلای شی چې هغه عدد ونیسي؟

یو شمیر ژبني عبارات او کلیمي ، چې په عبارتي سوالونو کې معمولاً پکارېږي، او د هغو معادل سمبولو په لاندې جدول کې درکړل شوي دي، چې کیدای شي ستاسي فهم پدې هکله ښه کړي.

$n + a$	د a په اندازه له n څخه لوی
$n - a$	د a په اندازه له n څخه کوچنی
$n \cdot a$	a واری n (a چنده n)
$n - a$	د n او a توپیر (تفاوت)
$n + a$	د n او a مجموعه
$n^2 + a^2$	د a او n د مربعو مجموع
$(a - n)^2$	د a او n د توپیر مربع (فرق)
$\frac{a}{2}$	د a نیمائی
$2 \cdot (a + n)$	د a او n د مجموعي 2 چنده

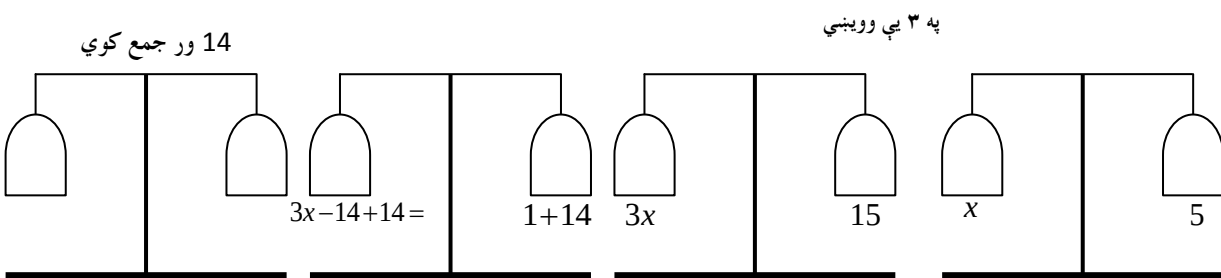
د الجبر معنی ده چې، په یوه معادله کې د توازن اعا ده کول پداسې ډول چې یوه طرف ته یې هغه شي ورواچول شي، چې له هغه بل طرف څخه مو لری کړی دي. د معادلې او غیر مساواتونو حل د الجبري پوهې یوه برخه ده. د الجبر دعلم بله برخه په اعدادو او نورو عناصرو باندې، چې د سمبولونو پوسیله معرفي شوی وي، عملیو اجرا کولو ته راجع کیږي.

ددې لپاره چې معادلي حل کړو د توازن په حالت کې د تلې د پلو له استعارې څخه کار اخستلای شو، مثلاً: $3x-14=1$ د مساوی علامه بنسې چې دواړه طرفونه سره برابر دي، نو د تلې په مقابلو پلو کې یې اچوو (د شکل په شان)



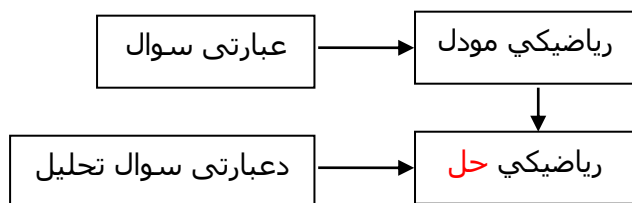
دا چې سره مساوي دی، نو د تلې توازن به ساتل شوي وي.

ددې لپاره چې x قسمت پیدا کړو، په دواړو پلو کې داسې لاسوهنه کوو چې تر هر موفقانه حرکت وروسته د تلې توازن برقرار پاتې شي. دغه عمل ته تر هغو ادا مه کوو تر څو چې په پای کې د تلې په یوه پله کې یوازې x پاتې شي.

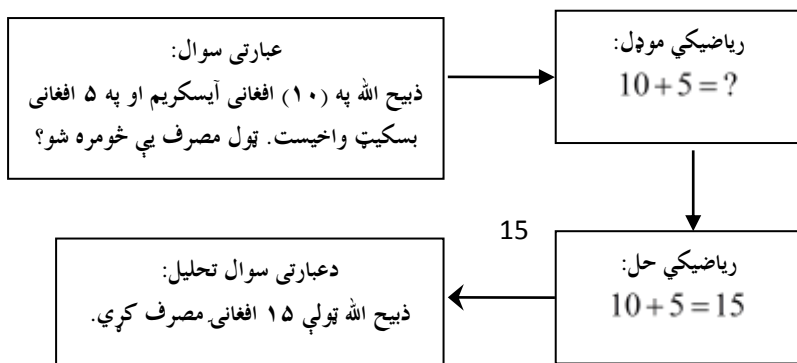


الجبر د ډیرو مسايلو د حل لپاره په کاريدای شي. په لومړنيو ټولگيو کې له دغه ډول مسايلو سره د شاگردانو بلدتيا په دوی کې دا وړتيا تقويه کوي چې وروسته بيا ډير پيچلي مسايل هم حل کړای شي. شاگردان بايد لومړي د پيچليتا د ټيټې سطحې مسايل تمرين کړي، تر څو دوي وکولای شي چې ورو ورو بيا مغلق او لوړ فکر ايجابوونکي مسايل حل کړای شي.

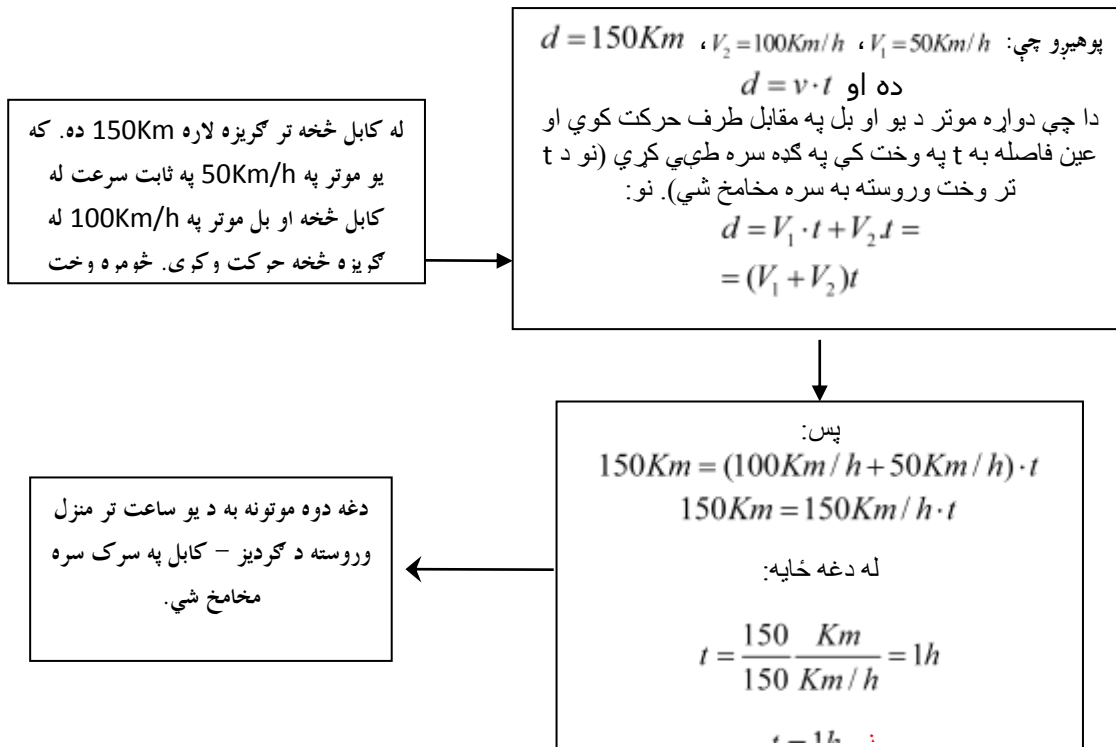
لاندې ساده موډل د مسايلو د حل کولو يوه طريقه بنسې.



د پورته موډل یو مثال د دریم ټولگي د شاگردانو لپاره په لاندې ډول کیدای شي:



د لیسې دورې لپاره به د دغه موډل یو مثال په لاندې ډول وي:



د پولیا د مسایلو د حل څلور ګامیزه پروسه د الجبري مسایلو د حل لپاره هم تطبیق کیدای شي. په لومړۍ قدم یعنی د مسلې تفهیم، کې باید دا په ګوته شي چې څه ډول معلومات راکړل شوي او څه شي را څخه غوښتل کېږي؟

په دوهم قدم، یعنی د پلان طرح کولو، کې معلوم او نا معلوم معلومات یعنی راکړل شوي او غوښتل شوي معلومات په سمبولونو ښیو او په یوه معادله یا غیر مساوات یې ترجمه کوو.

په درېم قدم، یعنی د پلان عملي کولو، کې دغه معادله یا غیر مساوات د ریاضي د قوانینو په مرسته حل کوو.

په څلورم قدم، یعنی بیرته کتنه، کې ترلاسه شوي حل په اصلي مسئله کې تعبیرو او چک کوو یې.

مثال: معادله یې ولیکئ او حل یې کړي.

خالد او زینب د خپل کور لپاره په 22500 افغاني اټانیه و اخیسته. 4500 افغاني یې نقدي ورکړي او پاتې به په 8 مساوي قسطونو کې ادا کوي. وویاست چې دوی به په هر قسط کې څومره افغاني ورکوي؟

حل:

1- یو قسط به p وېولو، نو:

$$8P = \text{ټول اته قسطونه به شي}.$$

$$8P + 4500 = \text{د اثاثي ټول قيمت}$$

$$8P + 4500 = 22500 \quad \text{اوس به معادله جوړه کړو:}$$

$$8P + 4500 - 4500 = 22500 - 4500$$

$$8P = 18000$$

$$8P = 18000$$

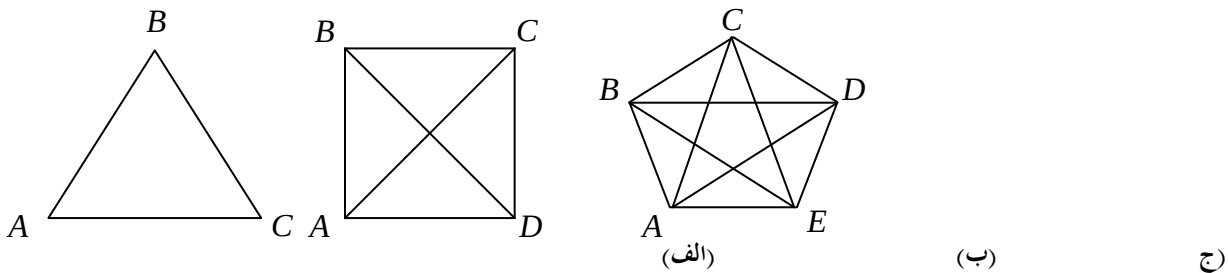
$$P = \frac{18000}{8} \Rightarrow P = 2250$$

4. د مسئلو د حل لپاره د گراف يا ډياگرام جوړولو ستراتیژی:

وايي چه يو تصوير د زرونو الفاظو څخه زيات ارزښت لري. دغه خبره په خاص ډول د مسائلو په حل کي ډيره ريښتيني ښکاري. شکلو په هندسه کي معمولاً د مسئلي حل روښانه کولای شي، خو په غير هندسي مسائلو کي هم شکلو په ډير کله د مسائلو په حل کي مرسته کولای شي. په لاندی مثال کي ئي وگوري.

مثال: د يوه مکتب په لسم صنف کي ټول ٢٠ تنه شاگردان وي. د تعلیمي کال په اوله ورځ له يو بل سره تعارف او سترې مشي کوي. که هر يو يوازي يو ځل خپل هر يوه همصنفي ته لاس وکړي، نو ووايست چه ټولي لاس ورکونې (سترې مشي) به څومره شي؟
لومړی قدم (په مسئله ځان پوهول): ټول ٢٠ تنه دي. دوه تنه په يو ځل ستره مشي کي راځي، يعنی په يو ځل سترې مشي به د دو تنو يو يو نوبت ختمیږي. يعنی که احمد له محمود سره او محمود له احمد سره سترې مشي وکړه، نو دا دوه نه بلکه يو ځل لاس ورکول حسابیږي. غواړو پيدا کړو چه ټولي لاس ورکونې به څووي؟

دوهم قدم: يوه لاره خو به داوای چه ٢٠ تنه مو سره درولي وای او لاس ورکونې مو حساب کړي وای. دغه ښه لاره ده، خو کيدای شي نورې په زړه پورې لارې ئي ولټوو. د دغی پلټنی لپاره يوه لاره د شکل يا ډياگرام رسمول دي. کولای شو چي دوو تنو مثلاً (A او B) لاس ورکونه په يوه خط وښيو. په لاندی شکلونو کي د ٣، ٤ او ٥ تنو سترې مشي (د خط پوسيله) ښودل شويدي.



نور نو د مسئلي د حل لپاره يوازي د هغو قطعه خطونو ښميرل کافي دي چه دوه تنه سره ښلولی. د ج په شکل کي د ٥ تنو سترې مشي ښودل شوي. گورو چه دلته A څلورو تنو (E, D, C, B) ته لاس ورکوي (٤ سترې مشي). همداراز B هم A, C, D او E ته لاس ورکوي، (بيا هم ٤ تنوته). په حقيقت کي هر يو له دغو پنځو څخه څلورو ته لاس ورکوي. نو ښکاري چي چي ټولي سترې مشي به $4+4+5=20$ شي. اما گورو چي د A او B تر منځ سترې مشي دوه ځلي حساب شوي (يو ځل له A له B سره او بيا B له A سره). همداراز دغه دوه ځلي سترې مشي د ټولو پنځو تنو لخوا واقع شوي دي. په نتيجه کي هره يوه دوه ځلي حساب شوي، نو چه صحيح عدد ئي پيدا کړو، بايد په ٢ ئي ووېشو. نو صحيح ځواب به:

$$\frac{5 \times 4}{2} = 10$$

دغه رویش د هر شمیر حاضرینو لپاره صدق کوی او تعمیم کیدای شی.

دریم قدم:

د پورته طرح شوی طریقی په عملی کولو سره پوهیدای شو چه د ۲۰ تنو لپاره به ټولی سترې مشی: $\frac{20 \times 19}{2} = 190$ شی.

څلورم قدم: بیرته کتنه

که وگورو چه د یوه تن په صورت کی هیڅ سترې مشی نشته. که دوهم تن راشی نو یوازی یوه، او که دریم تن راشی، نو له د مخکینو دواړو ته به لاس ورکړی او (۳) سترې مشی به شی (۱+۲). پدغه ترتیب که څلورم تن راشی نو له هر یوه سره پوښتنه کوی، نو ۳ نوری سترې مشی به په مخکینو ورزیاتی شی، یعنی: (۱+۲+۳).

د پنځم تن په زیاتیدو به ۴ نوری سترې مشی ورباندی زیاتی شی، یعنی (۱+۲+۳+۴) به شی. دغه مشاهده په لاندی جدول کی وینی. گوری چه آخری عدد (۴)، د خلکو له شمیر (۵) څخه د یوه په اندازه کم دي. د دغو علایمو په بنا ویلای شو ووايو چه د ۲۰ تنو په صورت کی به ځواب $(1+2+3+4+\dots+19)$ وي.

د سترې مشو شمیر	د خلکو شمیر
۰	۱
۱	۲
$۳=۱+۲$	۳
$۶=۱+۲+۳$	۴
$۱۰=۱+۲+۳+۴$	۵

د دغی محاسبی لپاره به د گاوس فارمول، چه د مسلسلو طبعی اعدادو د مجموعی په اړه دی (چی په مخکی پاڼو کی یی موولست) ډیر ګټور دي. د گاوس د فارمول له مخی لرو چه:

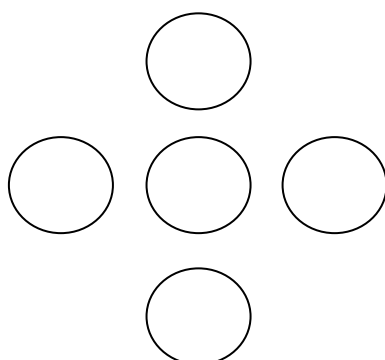
$$(1+2+3+4+\dots+19) = \frac{20 \times 19}{2} = 190$$

نو زموږ ټول ۲۰ تنه به (۱۹۰) ځلی سترې مشی وکړی.

۵. د حدس او امتحانولو ستراتیژی

د حدس او چک ستراتیژی له مخی موږ لومړی د امکان تر حده د یوه منطقی حدس وهلوله لاری یو حل پیدا کوو او بیایي آزمویو چه رښتینی حل به وي که نه. د حدس او چک ستراتیژی تر ډیره حده د «سعی او غلطی» مفکورې ته ورته وي، خو په حدس او چک کی زموږ حدس ډیر اتفاقی نه بلکه یو ممکن منطقی او مستدل گمان وي.

مثال: په لاندی شکل کی په هره یوه دایره کی یو له (۱، ۲، ۳، ۴، ۵) عددونو څخه داسی ولیکی چه افوقاً او عموداً ئې مجموعه سره یو شان وي.



لومړی قدم:

یو له (۱-۵) عددونو په یوه خالی خانه کی

داسی لیکو چه په یوه افقی خط کی (دری خانی)

او بل عمودی خط کی د لیکل شویو عددونو مجموعه

یو شان وي.

دوهم قدم:

دلته به ښه طريقه داوي چه حدس ووهواو بياني امتحان كړو.

درېم قدم:

ممکنه حلونه به ئې داسی وی:

	2		3		2
1	3	5	2	1	5
	4		4		3

خلورم قدم:

آيا كومه بله ښه لارئې شته؟

خو حلونه موجود دی؟

كه ۲ يا ۴ په منځ كې وي، حل به يې ممکن وي؟

د مسایلو دحل دجلسی دوراندی کولو پلان

موضوع: مسایل او د مسایلو دحل ستراتیژی گانی

عمومی هدف: شامیلین به د مسایلو د حل یو شمیر ستراتیژی زده او د غیر مروجو مسایلو په حلولو کی به د کار اخستلو وړتیا تر لاسه او لیواله شی.

د جلسی اهداف

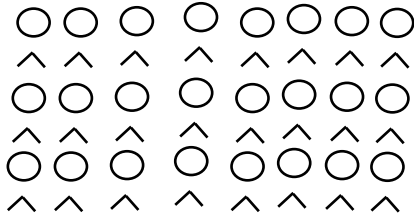
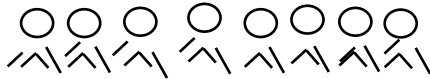
- شامیلین د مسایلو دحل په څلورگامیزه پروسه باندی پوهه شی.
- د مسایلو حل متنوع ستراتیژی گانی وکارولای شی.
- دمسایلو حل کی نوښت او ابتکار وکړای شی.
- شاگردانو ته د مسایلو د حل ستراتیژیو تدریس مهم وبولی اووپی کړای شی.
- بالاخره د ریاضی معنی داره استفاده په اعتماد سره ترسره کړای شی.

وخت: 90 دقیقې

مواد: د دغی موضوع ممد مواد او د لسم صنف د ریاضی کتاب د شامیلنو په اندازه.

د جلسی د وړاندی کولو طریقې: توضیحات، دوه نفری لوست، 5 نفری گروپی کار، په جهر فکر کولو په طریقه د مسایلو د حل ستراتیژی وړاندی کول.

مواد	د شامیلنو متوقعه فعالیت	د ترینر فعالیت	وخت
		یوه ورځ مخکې د مسایلو د حل څخه مواد ورکړل شي چې و ېې ولولي. آماده د مسایل حل حل یعنی څه؟ دحل ستراتیژي کومي دي.	5
مواد	په دوه نفرو ېې سره لولي. ځوابونه ورته تیاروي	د مسایلو حل () پانې ولولی، وویاست چې: مسئله یعنی څه؟ د پولیا څلور گامیزه پروسه یعنی څه؟ ولي مهمه ده چې تدریس ېې کړو؟ د کومو صنفونو لپاره مناسبه ده؟ (کوم ځواب چی نیمگړی وی سموو یی او یو څه بحث ورباندی کوو.)	20
تخته تباشیر	د پولیا د ستراتیژی چارت له مخی تشریح	لنډ توضیح: ۱- د پولیا څلور گامیز ستراتیژی سره له معنی او مثالونه. ۲- د حل ستراتیژي گاني	15
		د ستراتیژیوتدریس په مثال کې د «په جهر فکر کولو» په طریقه: راځی وگوروچې زه لاندې مسئله څنگه حل کوم: په یوه غوځل کې چرگان او پسونه دي چې ټول شمیر ېې ۲۴ دي. که د دواړو د پښو مجموعه (۶۴) وي نوڅو به چرگان او څومره به پسونه وي؟ لومړی قدم: د ۲۴ له جملې به یو شمیر چرگان او پاته به پسونه وي.	40

		خو که د چرگانو (دوه پښې) او پسونو (خلور پښې) که سره جمع کړو، نو باید (۶۴) شي. دغه راز پیدا کړو چې خونې چرگان او خونې پسونه دي؟ دوهم قدم: یوځل به دغه ۲۴ سرونه په درېو کتارو کې راته وکارېم. (د تختې په سر یې ولیکئ)  نه نو که هر یوه دوه پښې ولري؟ یعني که ټول چرگان وي، نو ټولې به (۴۸) پښې شي. - خو ټولې پښې یې باید (۶۴) وي نو ۱۶ (48=16-64) پښې باید د پسونو وي. هو! اوس نو باید یوه یوه شکل ته دوه دوه پښې ورزیاتي کړم. بلې! 49، 50 او 51، 52..... 63، 64	
- غوږ نیول - د ترینر په جهړ فکر کول - یادداشت کول - چه څه ئې وکړل؟ - څه وایې؟ متوقعه ځوابونه: - گراف - معادله جوړول - په جهړ فکر کولو ځوابونه وایی		بس! اوس به پسونه (خلور پښې) وگنو:  وینم چه 8 به پسونه وی. صحنې، ځواب خو می پیدا کړ خو څنگه یې بل ډول حل کولای شم؟ راځئ: معادله به یې جوړه کړم: لومړی قدم: پسونه او چرگان به څو څو وي؟ دوهم قدم: که (X) پسونه او (Y) چرگان وي، نو د دواړو مجموعه به 24 وی. یعنی: که د پسونو (X) ونو چه هریو خلور پښې لری. د چرگان (Y) ونو چه دوه پښې سره جمع کړم نو باید 64 شی، یعنی: $4X + 2Y = 64$ دریم قدم: اوس به نو دغه دوه دوه مجهوله معادلې حل کوم. $X=8$، $Y=16$، پس: 8 پسونه او 16 چرگان به وی. خلاصه و ارزایی:	

	مناقشه سره کوو	له شامیلنو خخه پوښتنه کوو: په دغه حل کې مو له کومو ستراتیژیو کار واخست ؟ ولی داسی فکرکوي؟ کومه یوه بی ښه وه؟ د هغه صنف شاگردانو ته چی تاسی درس ورکوی به مو کومه یوه خوبښه کړی وه او ولی؟ ما خبری کولی او کار می کاوو. دغه زما خبری د څه معنی لرله؟ ولی؟ څه گټه لري؟	10 دقیقی
--	----------------	---	------------------------